Margreicy Celia Alves

RAZÃO ÁUREA E PROPORCIONALIDADE: PROPOSTAS DE ENSINO

São João del-Rei/MG

2019

Margreicy Celia Alves

RAZÃO ÁUREA E PROPORCIONALIDADE: PROPOSTAS DE ENSINO

São João del-Rei - MG

2019

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado na Universidade Federal de São João del-Rei como requisito básico para a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira

São João del-Rei, 25 de junho de 2019

Banca Examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Francinildo Nobre Ferreira

Profa. Dra. Fabíola de Oliveira Miranda

Profa. Dra. Viviane Cristina Almada de Oliveira

AGRADECIMENTOS

Tenho muito a agradecer pela conclusão deste trabalho, a Deus, por alimentar minha fé e esperança de que as dificuldades não devem ser motivo para a desistência. Creio que Ele em sua infinita sabedoria nos concede as oportunidades necessárias à nossa evolução, ainda que muitas vezes não consigamos perceber seu auxílio sempre providencial e generoso.

Agradeço a Deus, novamente, por ter permitido que eu fosse filha dos melhores pais que alguém poderia ter. Meu pai, Antônio (*in memorian*) e minha mãe, Regina, o apoio dos dois em minha vida sempre ocorreu de forma constante, incondicional e em todos os momentos de minha vida, os valores que me ensinaram tiveram papel fundamental em toda minha formação como ser humano e influíram fortemente para que eu persistisse, mesmo quando tudo parecia convergir para a impossibilidade de realização desse sonho.

Às minhas irmãs Marlaisy e Mardaisy que ao perceberem algum traço de desânimo em minhas atitudes, me incentivaram a prosseguir na caminhada e acreditaram mais em minha capacidade do que eu mesma.

Aos meus filhos, Tamires e Arthur, que ainda crianças tiveram de mostrar maturidade e reponsabilidade diante de minha ausência, durante as noites em que estudava, durante as horas em que me debrucei em livros buscando a preparação adequada para a realização das atividades pertinentes ao curso. A eles, também agradeço por compreenderem a minha necessidade em buscar aperfeiçoamento intelectual e profissional.

Aos professores da instituição, que aceitaram partilhar suas vivências e conhecimentos no intuito de colaborar com a formação qualificada dos discentes deste curso, aos membros do colegiado com quem aprendi muito durante os dois anos em que exerci o cargo de membro discente do curso e onde tive a oportunidade de criar laços de amizade. Em especial, ao meu orientador, Francinildo, que agiu com muita compreensão diante das dificuldades que encontrei na concepção deste trabalho.

Aos colegas e amigos, do curso e da vida, que dividiram comigo momentos de alegria, apreensão, felicidade, tensão, risadas e esperança. Agradeço pela generosidade, confiança, compreensão e carinho desvelado a mim durante toda nossa caminhada.

“Para mim, umas das preocupações minhas, uma das razões de minha luta, uma das razões de minha presença no mundo é exatamente a de que, como educador, eu posso contribuir para uma associação crítica da possibilidade da passividade, para que se vá além dessa passividade, no que chamo de posturas rebeldes, de posturas criticamente transformadoras do mundo.”

Paulo Freire

RESUMO

Este trabalho desenvolve-se em torno do estudo da razão áurea presente em vários aspectos da vida humana e da natureza. Ao longo de sua concepção, encontramos estudos e pesquisas que levam a crer que o número de ouro não é uma mera invenção humana, visto que sua presença pode ser notada em espécies animais, vegetais e até mesmo em fenômenos da natureza. Após o estudo de sua presença em diferentes áreas do conhecimento, propomos que as curiosidades acerca deste número sejam utilizadas como ferramenta na criação de propostas de ensino que trabalhem conjuntamente a proporcionalidade e a razão áurea. Como uma tentativa de criar oportunidades de estudo que levem à percepção de que a Matemática não é uma ciência isolada do restante do mundo e desta forma diminuir a aversão que muitos alunos possuem pela Matemática.

Palavras chave: Razão Áurea, Número de Ouro, Ensino, Proporcionalidade.

ABSTRACT

This work is developed around the study of golden reason present in various aspects of human life and nature. Throughout its conception, we find studies and research that lead to us believe that the number of gold is not a mere human invention, since its presence can be noticed in animal species, vegetal and even in phenomena of the nature. After studying their presence in different areas of knowledge, we propose that the curiosities about this number could be used as a tool in the creation of teaching proposals that work together on proportionality and the golden ratio. As an attempt to create opportunities for study that lead to the perception that mathematics is not a science isolated from the rest of the world and thus lessen the aversion that many students have for mathematics.

Keywords: Golden Ratio, Gold Number, Teaching, Proportionality.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1-Introdução

A proporcionalidade é um dos temas que deve ser trabalhado no ensino básico e que está inserido no ensino de grandezas e medidas, recomendado nos Parâmetros Curriculares Nacionais. A proporção é um assunto que pode ser relacionado a aspectos variados do cotidiano e possui grande importância para compreensão de temas relacionados às Ciências Naturais e à Geografia (como no estudo de velocidade, densidade e escalas).

> A proporcionalidade é um dos mais importantes conceitos da Matemática, visto a sua aplicabilidade a diversas situações do dia a dia (compra e consumo, escalas, produtividade,...); dentro da própria matemática (multiplicação e divisão, equivalência de frações, porcentagem, relações entre unidades de medida, semelhança geométrica e homotetia, teorema de tales,...); e sua utilização por diversas áreas do conhecimento (física, química, biologia, engenharia,...) (IMENES,2008, apud NEHRING; SOARES, 2013, p.1).

O maior intuito deste trabalho é oferecer atividades alternativas, que relacionem o ensino de proporcionalidade com a razão áurea. Para que esse objetivo seja realizado, será feito um breve estudo sobre a origem do número de ouro e suas propriedades. Além disso, serão mostradas as curiosidades a respeito desse número e a diversidade de áreas de conhecimento que são relacionadas à razão áurea.

Essa razão tem sido objeto de estudo ao longo de séculos. Ela pode ser encontrada em importantes obras históricas, artísticas, arquitetônicas, na natureza e nas proporções do corpo humano. Esta famosa razão tem sido objeto de estudo de diversos matemáticos desde os primórdios. A curiosidade em torno deste número se deve ao fato de que supostamente ele esteja relacionado ao belo, à harmonia e à perfeição. Além de matemáticos, estudiosos de outras áreas, tem pesquisado sobre essa constante, seus diversos aspectos e aplicações.

Segundo Livio:

> A fascinação pela Razão Áurea não se restringe aos matemáticos. Biólogos, artistas, músicos, historiadores, arquitetos, psicólogos e até místicos têm examinado e debatido bases de sua ubiquidade e seu apelo. De fato, provavelmente, é correto dizer que a Razão Áurea tem inspirado pensadores de todas as disciplinas mais do que qualquer outro número na história da matemática. (LIVIO, 2008, apud BRENNER, 2016, p.6)

A presença recorrente deste interessante número nos mais variados aspectos da vida humana, além de causar curiosidade ao aluno do ensino básico, pode despertar nele um sentimento motivador com relação a matemática. Pode permitir uma visão mais bela e cativante desta ciência que é vista por muitos como inalcançável e incompreensível.

Concluído o estudo sobre a razão áurea, serão expostas algumas sugestões de atividades, as quais deverão ser aplicadas a alunos que já possuam conhecimento prévio a respeito das propriedades de razão e proporcionalidade. As propostas apresentadas terão como objetivo relacionar a razão áurea a e a proporcionalidade.

2 - Origem do número de ouro

Dado um segmento $\overline{AB}$, e um ponto $C \in \overline{AB}$, como na figura:

dizemos que o ponto C divide o segmento $\overline{AB}$ na razão áurea, quando $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Fazendo $\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ (φ: lê-se fi)

Temos que:

$$\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC} + \overline{CB}}{\overline{AC}} = 1 + \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

Ou seja,

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Que tem uma das soluções [1] sendo:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618 \ldots$$

Esse número φ, é conhecido como razão áurea, número de ouro, divina proporção, média e extrema razão [2].

Segundo historiadores a origem do número de ouro é muito incerta, pois já no antigo Egito podemos notar sua presença. O grego Heródoto, por exemplo, relatou que durante a construção das pirâmides do Egito, em torno de 2500 a.C., a razão áurea já era conhecida (LANDIM, 2014). A razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base, da pirâmide de Gizé, equivale ao número de ouro [3].

[1] A solução negativa não será considerada neste caso por se tratar de medida de segmento

[2] Na seção 10.1 veremos como construir o ponto C que divide AB em média e extrema razão, neste caso o segmento AB é chamado segmento áureo.

[3] Maiores detalhes, sobre esta afirmação na seção 8.

Um dos primeiros registros da chamada média e extrema razão, na Grécia, ocorreu por volta do ano 300 a.C., período em que grandes pensadores matemáticos como Euclides e Pitágoras, dedicaram boa parte de seu tempo estudando as propriedades deste número. Segundo alguns historiadores, os pitagóricos perceberam que a razão áurea estava presente no pentagrama [4], em que a razão entre a medida da diagonal e a medida do lado do pentágono regular no qual o pentagrama está inscrito equivale ao número de ouro (φ).

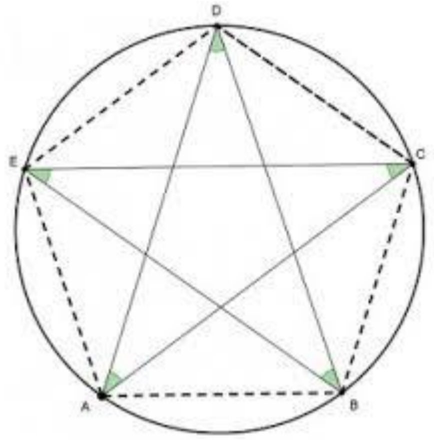

Figura 1- Pentagrama
Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-estrela-pentagonal/
(acesso em 27/06/2019)

Para compreender como a razão áurea é o quociente entre a medida da diagonal do pentagrama e a medida do lado de um pentágono regular no qual o pentagrama está inscrito, considere o pentágono regular $ABCDE$ da figura anterior, cujas as diagonais se interceptam formando um novo pentágono $A'B'C'D'E'$ (figura 2).

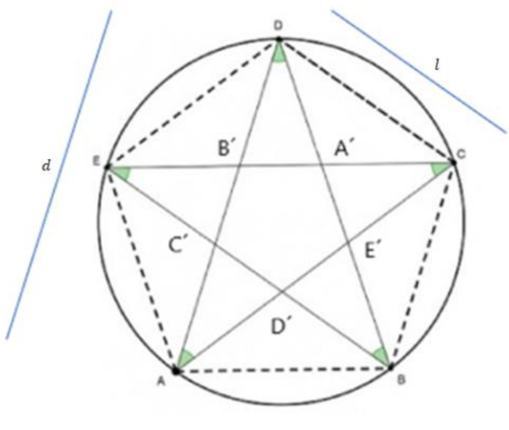

Figura 2 - Pentagrama inscrito em um pentágono regular (modificado pela autora)
Fonte: http://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-estrela-pentagonal/
(acesso em 27/06/2019)

[4] O pentagrama é uma estrela composta por cinco retas e que possui cinco pontas, a estrela de vértices A, B, C, D, E da figura 1.

Denotando por, l a medida do lado do pentágono regular $ABCDE$, por d as medidas de suas diagonais, usando semelhança de triângulos e algumas operações algébricas concluiremos que a razão entre a medida da diagonal e a medida do lado determine o número de ouro.

De fato, os ângulos internos do pentágono são congruentes, pois estamos tratando de um polígono regular. O quadrilátero $DED'C$ (figura 2) é um paralelogramo, $D'C \mathbin{/\!/} CD$, pois $D'\hat{C}E$ é igual a $C\hat{E}D$, já que a medida $\overline{DC} = \overline{AE}$.

Analogamente, $\overline{ED'} \mathbin{/\!/} \overline{CD}$, pois $B\hat{E}C$ é igual a $E\hat{C}D$, já que $\overline{BC} = \overline{ED}$.

O triângulo AED', é isósceles, pois e $ED' = l = AE$. Os triângulos $CDA' = CED'$, são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo, dessa semelhança temos:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{\overline{CD}}} = \frac{\overline{ED}'}{\overline{\overline{DA'}}}.$$

Como $ED' = EA$ segue que:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{\overline{CD}}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{\overline{DA'}}}$$

$\overline{CD} = \overline{EA} = l$, $\overline{CE} = d$, $\overline{DA'} = \overline{DB} - \overline{BA'}$ e $ABA'E$, é um paralelogramo (a justificativa desta afirmação é análoga a feita anteriormente de que o quadrilátero $DED'C$ é um paralelogramo), então $\overline{BA'} = \overline{AE} = l$, portanto $\overline{DA'} = d - l$.

Substituindo d e l na proporção anterior, obteremos:

$$\frac{d}{l} = \frac{l}{d - l}.$$

Ou seja,

$$l^2 = d^2 - dl\,.$$

Tomando x, como a razão entre a medida da diagonal e a medida do lado do pentágono, temos que:

$$d = lx\,.$$

Substituindo este valor de d na equação anterior obtemos:

$$l^2 = (lx)^2 - lxl$$

$$l^2 = l^2x^2 - l^2x$$

Dividindo essa equação por l^2, obtemos

$$1 = x^2 - x$$

$$x^2 - x - 1 = 0\,.$$

Resolvendo esta equação, encontraremos:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

A solução positiva desta equação é o número de ouro

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi\,.$$

2.1 - Retângulo áureo

Um retângulo áureo é aquele em que a razão obtida entre o seu comprimento e a sua altura tem como resultado o número de ouro. Esse tipo de retângulo possui a importante característica de que ele pode ser dividido de forma que se obtenha um quadrado e um outro retângulo áureo. Na figura 3, temos o quadrilátero $ABCD$, retângulo áureo, o quadrado $AEFD$ e o retângulo áureo $EBCF$. Esse processo pode ser realizado de maneira sucessiva, que ainda assim obtém-se um novo retângulo áureo.

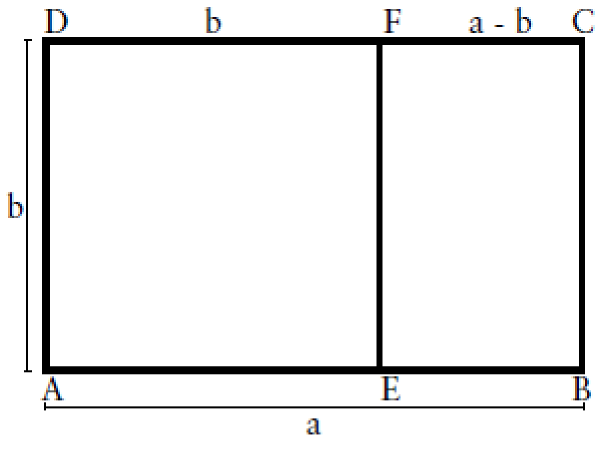

Figura 3 - Retângulo Áureo
Fonte: http://aespeculadora.blogspot.com/2011/03/retangulo-aureo-de-ouro-matematica.html
(acesso em 27/06/2019)

Uma outra importante propriedade do retângulo áureo, é a possibilidade de se construir a partir dele a espiral áurea. Que pode ser feita da seguinte forma traçamos um quarto de circunferência, que tenha a medida do lado do quadrado como raio, arco $\widehat{DE}$, (figura 4) e realizamos este processo sucessivamente, obtendo os arco $\widehat{EG}$, $\widehat{GJ}$,..., ao unirmos esses arcos obteremos a espiral, como pode ser observado na figura.

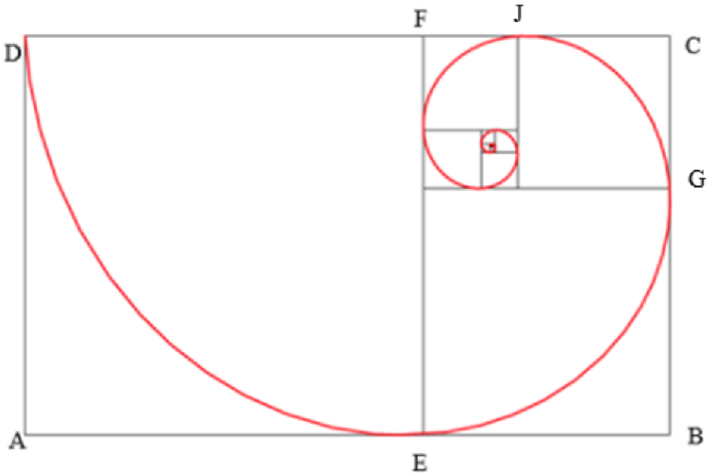

Figura 4 - Espiral áurea (modificada pela autora)
Fonte: http://mathworld.wolfram.com/GoldenRectangle.html
(acesso em 27/062019)

3 - Sequência de Fibonacci e a razão áurea

Um importante matemático que também teve seu trabalho relacionado ao número de ouro foi Leonardo Fibonacci (1175-1250). Em seu livro "Liber abaci", no capítulo XII, podemos encontrar o famoso "problema dos coelhos" que originou a chamada sequência de Fibonacci.

Neste problema, Fibonacci, considerou que um casal de coelhos torna-se fértil após um mês, assim um casal dá origem a um novo casal de coelhos a cada mês, figura tal. Esse novo casal também leva um mês para tornar-se fértil, um mês depois daria origem a um novo casal de coelhos. Esse processo, considerando que não haveria óbito de coelhos, aconteceria indefinidamente. (FERRER,2018)

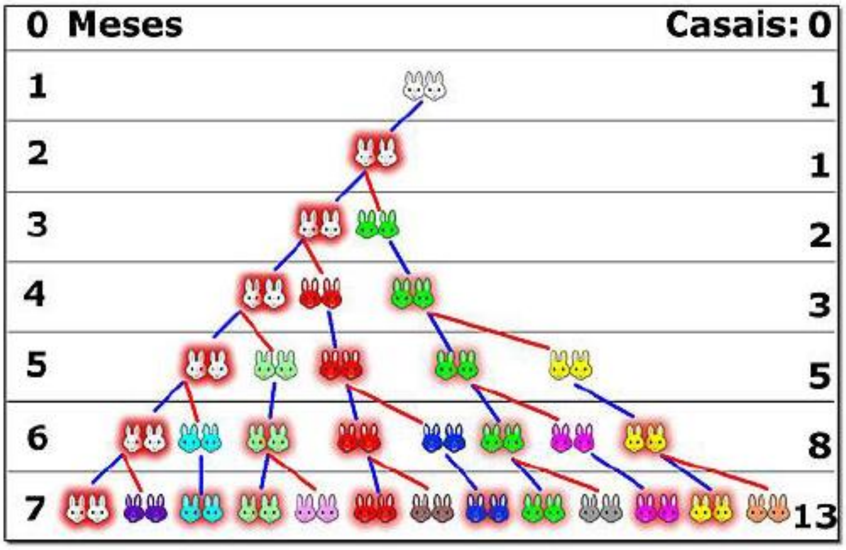

Figura 5 - Ilustração da Sequência de Fibonacci com o problema dos coelhos
Fonte: SILVA, 2010
(acesso em 27/06/2019)

Desta forma, chega-se à conclusão de que em qualquer mês (a partir do terceiro) o número total de coelhos será obtido através da soma do total de pares de coelhos dos dois meses imediatamente anteriores. Obtendo-se assim a seguinte sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89..., conhecida como sequência de Fibonacci. Se considerarmos, o termo geral (u_n) dessa sequência, esses termos podem ser obtidos pela lei de recorrência:

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \qquad para\, n \geq 2 \qquad (*)$$

Se procurarmos as progressões geométricas (q^n) de razão q, com $q \neq 0$, que satisfazem a relação $(*)$, devemos ter:

$$q^{n+1} = q^n + q^{n-1}.$$

Dividindo esta equação por q^n, obteremos:

$$q = 1 + \frac{1}{q}.$$

Ou seja,

$$q^2 - q - 1 = 0.$$

Cujas soluções, são:

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

A partir dessas razões obtém se, duas progressões geométricas satisfazendo a relação $(*)$:

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad e \quad b_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Pode-se provar que:

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}},$$

para $n \geq 2$.

Para maiores detalhes veja: (HEFEZ, A. FERNANDEZ, C.S. Introdução à Álgebra Linear: Coleção PROFMAT. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012. p.8)

Esta sequência possui uma curiosa relação com o número de ouro. Se fizermos a razão entre um número da sequência e seu antecessor de forma sucessiva, utilizando uma aproximação até a décima oitava casa decimal veremos que essa razão se aproxima do número de ouro. O quadro 1, a seguir apresenta algumas razões cujos valores $Fn = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, sendo a_n, o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci e a_{n-1} , o termo antecessor imediato de a_n .

Quadro 1 – Relação da razão áurea com a sequência de Fibonacci

n	a_n	$\frac{a_n}{a_{n-1}}$	F_n
1	1	_	_
2	1	1/1	1,000000000000000000
3	2	2/1	2,000000000000000000
4	3	3/2	1,500000000000000000
5	5	5/3	1,666666666666666666...
6	8	8/5	1,600000000000000000
7	13	13/8	1,625000000000000000
8	21	21/13	1,615384615384615384...
9	34	34/21	1,619047619047619047...
10	55	55/34	1,617647058823529411...
11	89	89/55	1,618181818181818181...
12	144	144/89	1,617977528089887640...
13	233	233/144	1,618055555555555555...
14	377	377/233	1,618025751072961373...
15	610	610/377	1,618037135278514588...
16	987	987/610	1,618032786885245901...
17	1597	1597/987	1,618034447821681864...
18	2584	2584/1597	1,618033813400125234...
19	4181	4181/2584	1,618034055727554179...

Fonte: A autora

Observando o quadro podemos notar que à medida em que prosseguimos com a divisão de termos sucessivos da sequência de Fibonacci, o resultado da divisão oscila para maior ou menor que a Razão Áurea, mas aproxima-se cada vez mais dessa razão.

4 - A razão áurea na natureza

A partir da sequência de Fibonacci pode se fazer uma associação do número de ouro com vários elementos da natureza como veremos a seguir.

Durante o ciclo de reprodução em uma colmeia, os ovos das abelhas operárias, que não são fertilizados, tornam-se zangões, ou seja, os zangões não possuem um “pai”. Por outro lado, os ovos da abelha rainha são fertilizados e por isso produzem fêmeas, desta forma, fêmeas tem um “pai” e uma “mãe”. Se continuarmos construindo a árvore genealógica dos zangões perceberemos que o zangão possui dois avós (que são os pais de sua mãe), três bisavós (os pais da sua avó e a mãe do seu avô), cinco trisavós (que são dois para cada bisavó e um para seu bisavô) e assim por diante. Obtém-se assim, através da árvore genealógica do zangão, a sequência de Fibonacci. A figura a seguir mostra um exemplo de parte de uma árvore genealógica do zangão. (SILVA,2014)

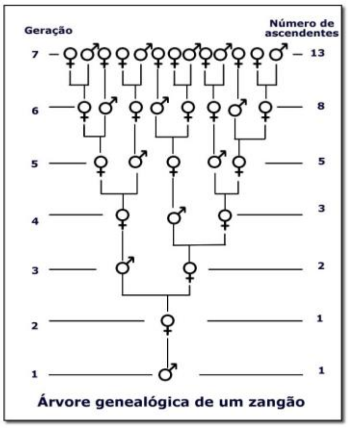

Figura 6- Árvore genealógica do zangão
Fonte: https://www.bpiropo.com.br/fpc20070319.htm
(Acesso em 27/06/2019)

As espécies arbóreas também podem ter sua estrutura relacionada à sequência de Fibonacci. Em algumas delas podemos observar que a disposição dos galhos acontece de forma bem peculiar, impedindo a sobreposição de folhas, proporcionando uma captação de raios solares adequada e possibilitando uma absorção de água suficiente para o desenvolvimento da planta; a disposição dos galhos são estudadas pela filotaxia[5]. De acordo com a filotaxia, as folhas das plantas podem se dispor no caule de maneiras diferentes. As que se apresentam com maior ocorrência são dística[6], decussada[7] e espiral. A forma espiral é a mais frequente nos vegetais, caracteriza-se por apresentar as folhas formando um padrão helicoidal ao longo do caule, conforme figura a seguir.

[5]Filotaxia (do grego, phyllous significa folhas e táxis, significa ordem) é o ramo da botânica que estuda a disposição das folhas ao longo do caule.

[6]Dística: quando as folhas ocorrem em duas fileiras ordenadas ao longo do ramo, em um único plano.

[7]Decussada: cada par de folhas cruza-se em um ângulo reto com o par seguinte.

Dados dois números a e b chama-se de divergência das folhas à razão, $\frac{a}{b}$, quando a e b são obtidos da seguinte forma: traçando uma espiral que passa pela base de cada folha até que ela atinja a primeira base verticalmente acima do ponto inicial, o valor de a representa o número de voltas dadas pela espiral em volta do galho, enquanto o valor de b é o número de bases de folhas pelas quais a espiral passou, excluindo-se deste processo a primeira base. A maioria dos vegetais que apresentam este tipo de filotaxia tem esta razão sendo formada por números da sequência de Fibonacci, apresentando razões do tipo $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}$, ... Na figura a seguir pode se observar a erva caniça, planta que possui razão filotáxica de $\frac{1}{2}$. (SILVA,2014)

Figura7 - Erva caniça
Fonte: http://siaram.azores.gov.pt/flora/flora-vascular/erva-canica/7.html
(Acesso em 27/062019)

Também é possível observar a presença dos números de Fibonacci no crescimento dos ramos de algumas plantas. À medida em que ela se desenvolve a soma do número de galhos, remanescentes e dos novos, formam os termos da sequência de Fibonacci, olhando pelo plano horizontal, como pode ser observado a seguir (SILVA, 2014).

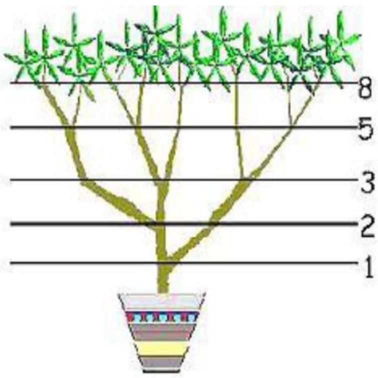

Figura 8 - Estrutura Arbórea
Fonte: http://www.uel.br/projetos/matessencial/alegria/fibonacci/seqfib2.htm
(Acesso em 27/06/2019)

Os girassóis apresentam suas sementes dispostas em espirais sobrepostas, no sentido horário e anti-horário. Segundo Huntley (1985), a maioria dos girassóis apresentam sementes com 21 espirais no sentido anti-horário e 34 no sentido horário (Figura 9), sendo estes números, algarismos sucessivos da sequência de Fibonacci.

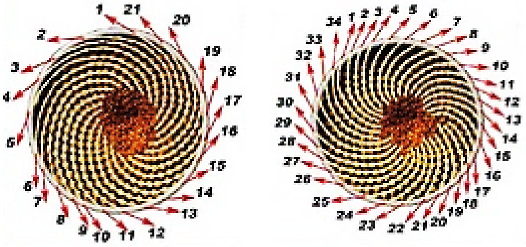

Figura 9 – Sementes de um mesmo girassol com 21 espirais no sentido anti-horário e 34 no sentido horário
Fonte: http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html
(Acesso em 27/06/2019)

Já segundo Lívio (2007, apud SANTOS; CARDOSO; SILVA, J., 2012 p.6):

> A quantidade dessas espirais em geral depende do tamanho do girassol. O mais comum é que existam 34 espirais em um sentido e 55 no outro, mais girassóis com quocientes de números de espirais de 89/55, 144/89 e até de 233/144 (pelo menos; relato por um casal de Vermont à Scientific American em 1951) foram vistos. Todos esses valores são, obviamente, razões de números de Fibonacci adjacentes.

5 - A razão áurea no Corpo Humano

Podemos notar a presença dessa razão em algumas articulações de muitos corpos humanos. Em vários indivíduos as medidas entre as falanges dos dedos das mãos apresentam valores que ao serem colocados em uma razão resultarão em uma aproximação do número de ouro. Podemos observar esta relação na imagem a seguir (figura 24). (SILVA, 2014)

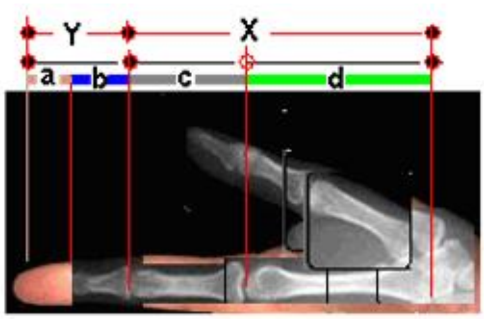

Figura 10 - Falanges da mão humana
Fonte: https://musicaeadoracao.com.br/25388/segmento-aureo-aplicado-a-construcao-de-violoncelos-violinos/
(acesso em 27/06/2019)

Observando a figura, e fazendo as medidas dos segmentos representados pelas cores cinza c e verde d, e dividindo o valor correspondente à medida total do segmento $c + d$ pela medida do segmento em verde d, frequentemente, obtém se um valor próximo ao número de ouro. Analogamente, essa observação se repetirá nas demais medidas das falanges ao se dividir a medida do segmento cinza e azul, $c + b$, pela medida do segmento cinza, c; e ao calcularmos a razão entre a medida do segmento, $a + b$ sobre a medida do segmento, b.

Ao dividirmos a medida obtida do ombro até a ponta do dedo médio da mão $A + B + C$ (figura 11), pela medida do cotovelo até a ponta do mesmo dedo, $A + B,$ teremos uma aproximação de φ como resultado.

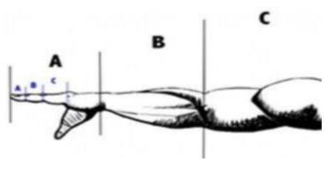

Figura 11 – Braço humano
Fonte: http://www. goldennumber.net
(acesso em 27/06/2019)

Em termos matemáticos temos:

$$\frac{A + B + C}{A + B} = \varphi$$

De maneira semelhante, podemos encontrar uma aproximação do número de ouro, se fizermos a razão entre a medida do cotovelo até o dedo médio pela medida do cotovelo até o punho (figura 11). Ou seja:

$$\frac{A+B}{B}=\varphi$$

Prosseguindo a observação na anatomia do corpo humano, encontramos outras razões que se aproximam da razão áurea. Como por exemplo, usando as notações presentes na figura a seguir.

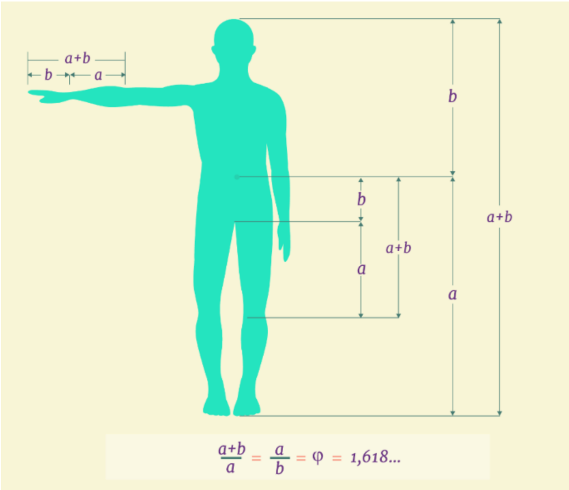

Figura 12 – Corpo humano
Fonte: https://www.gcfaprendelibre.org/blog/la_joya_dorada_de_las_matematicas/1.do (acesso em 27/06/2019)

Temos que:

A medida, $a+b$, da altura do corpo humano dividida pela medida, a, do umbigo à planta dos pés, determina aproximadamente o número de ouro. Ou seja:

$$\frac{a+b}{a}=\varphi$$

Também temos que:

A medida, a, da altura do umbigo à planta dos pés dividida pela medida, b, do umbigo até a cabeça, determina aproximadamente o número de ouro. Isto é:

$$\frac{a}{b}=\varphi$$

Ainda temos que, a medida, $a+b$, do umbigo até o joelho dividida pela medida, a, da pélvis ao joelho, aproxima-se do número de ouro. Ou seja:

$$\frac{a+b}{a}=\varphi$$

De acordo com (TAKESHITA et al), a dentição humana também está relacionada com a razão áurea, pois vários estudiosos acreditam encontrá-la nas estruturas mais estáveis e esteticamente belas, além de apresentarem funcionalidade equilibrada e eficiente.

Segundo o artigo citado, pessoas que realizam tratamento ortodôntico geralmente não possuem oclusão dentária[8] adequada, desta forma tendem a não apresentar a razão áurea em sua disposição dentária. No entanto, pesquisadores da área odontológica afirmam ser possível encontrar a divina proporção presente em indivíduos que apresentam oclusão considerada normal.

De acordo com Garbin (1997, apud TAKESHITA et al, 2007, p. 18), utilizando-se uma amostra de 40 radiografias cefalométricas, em norma lateral, de jovens adultos com oclusão dentária considerada normal, os pesquisadores constataram que das seis proporções estudadas em cada uma das radiografias, cinco apresentavam a proporção áurea em suas medidas, independentemente do sexo do jovem avaliado no método de pesquisa.

Observando a figura a seguir, e calculando a razão entre a medida do incisivo central e do incisivo lateral, obtemos uma aproximação de φ, a pesquisa do autor citado anteriormente. Da mesma forma, ao realizarmos a razão entre a medida do incisivo lateral e do canino também obtemos um valor próximo de φ.

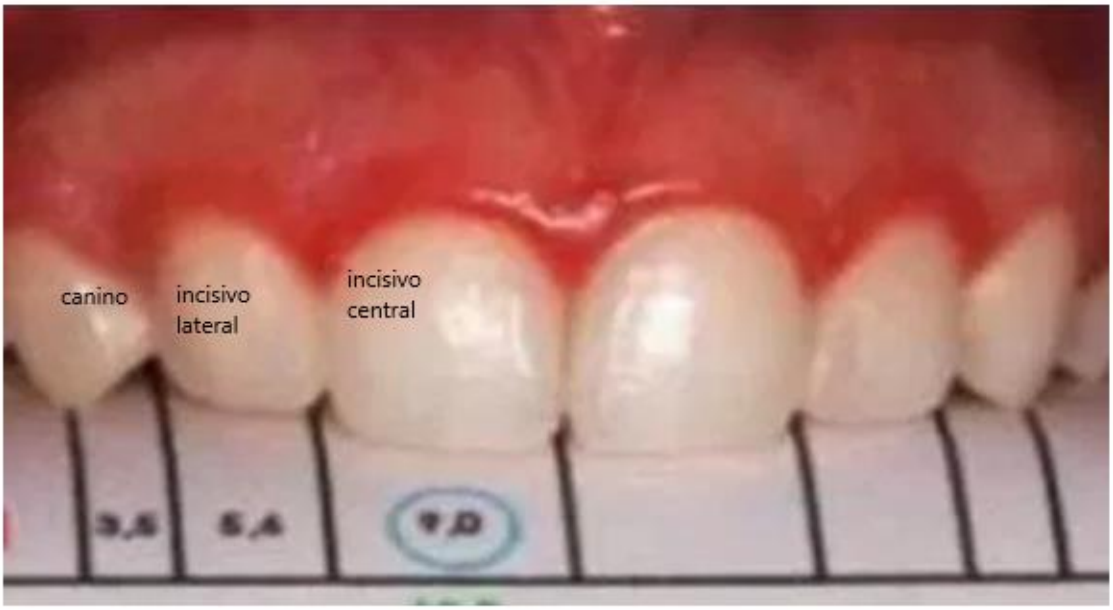

Figura 13- Razão entre os dentes
Fonte: https://i0.wp.com/www.raciociniocristao.com.br/wp-content/uploads/2014/05/Fibonacci-na-denticao-1.jpg
(acesso em 27/06/2019)

[8]Contato dos dentes superiores com os inferiores ao fechar a boca.

6 - A razão áurea nas Artes

Sempre existiu uma curiosidade acerca da beleza e perfeição de algumas formas encontradas na natureza. Artistas buscaram ao longo dos anos reproduzir esta beleza em seus trabalhos. Através da matemática buscou- se uma justificativa para a sensação de perfeição que algumas dessas obras despertam ao serem observadas. (SOUZA, 2013)

Em vários trabalhos há registros de que a arte foi fortemente influenciada pela existência do número de ouro. Esta afirmação pode ser comprovada através do estudo e análise de obras renascentistas, dentre as quais, destacam-se os trabalhos concebidos por Leonardo da Vinci (1452 – 1519), que era um exímio desenhista, essa habilidade permitia que ele realizasse obras magníficas que são admiradas ao longo dos séculos.

Da Vinci era um grande conhecedor da matemática, e de outas ciências, utilizava a razão áurea para garantir que suas obras fossem perfeitas, belas e harmônicas.

Sua mais famosa obra é "A Mona Lisa" [9] nela podemos observar a presença da razão áurea da seguinte forma:

(A) O retângulo traçado em torno da face, (figura 14), na primeira imagem à direita, seria um retângulo áureo.

(B) Dividindo o retângulo anteriormente traçado em torno da face, utilizando o segmento sobre os olhos, obteremos um novo retângulo áureo, na segunda e terceira imagem à direita.

(C) A dimensão em que está disposta a silhueta da Mona Lisa também ocorre em um retângulo áureo, como podemos visualizar na imagem à esquerda (figura 14).

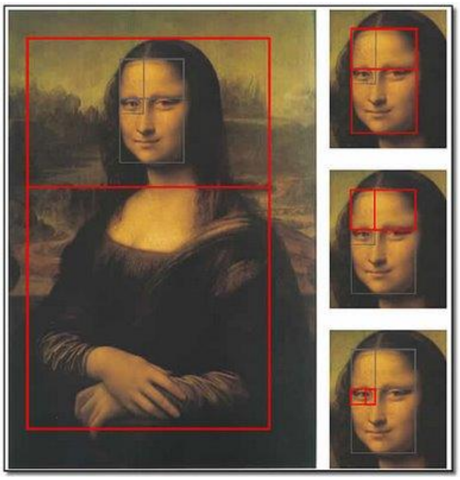

Figura 14 – A Mona Lisa
Fonte: http://matematicadaelenise.blogspot.com.br/2009/10/leonardo-da-vinci-e-o-retangulo-aureo.html
(acesso em 27/06/2019)

[9]Pintura que faz parte do acervo do Museu do Louvre, em Paris na França.

A utilização da razão áurea como forma de buscar a harmonia e beleza nas obras de arte não é exclusividade de artistas renascentistas. Exemplo disso é a obra de Salvador Dalí (1904-1989), importante artista surrealista do século XX. Na sua obra "A última ceia" verificamos a presença de espirais áureas e retângulos áureos, como podemos observar na figura a seguir.

Figura 15 – A última ceia (1955), Salvador Dalí
Fonte: http://gizmodo.uol.com.br/mitos-proporcao-aurea/
(acesso em 27/06/2019)

7 - A razão áurea na Música

Na música, uma das expressões artísticas mais populares em todo mundo, podemos observar a presença da razão áurea em diversas obras do gênero clássico. Esta relação vai desde a composição musical, construção de instrumentos e execução destas composições. Acredita-se que os gregos utilizavam a razão áurea na música, com o intuito de alcançar uma sonoridade estética sofisticada.

Segundo alguns autores (BAIER; HENSCHEL, 2016), (FREITAS, 2008), pesquisas realizadas a respeito das relações históricas entre a música e os números, permitiram o aperfeiçoamento das notações musicais. A razão áurea está presente nos arranjos musicais, relacionando números inteiros com o objetivo de variar o tempo entre as notas musicais bem como os sons e compassos. Ela também desempenha um papel indispensável na proporção entre ritmo e melodia, nas variações e notações musicais.

Segundo o trabalho desenvolvido por (FARIA, 2016), a acústica obtida com a utilização da razão áurea é considerada superior, se comparada com outras razões.

Alguns artigos relacionam obras de renomados compositores clássicos à Divina Proporção. Ela estaria presente na “Sinfonia nº 5”, composição do genial Ludwig Van Beethoven (1770 -1827), nos compassos das sonatas de Wolfang Amadeus Mozart (1756-1791); obras do pianista húngaro Béla Bártok (1881-1945); nas seções da música “*Reflets dans l´eau de Images*” para piano do francês Claude Debussy (1862-1918); em composições do austríaco Franz Schubert (1797-1828); e em “Choros nº 5” do brasileiro Heitor Villa Lobos (1887-1959) (BAIER; HENSCHEL, 2016).

Existe uma discussão em torno da intencionalidade do uso da razão áurea nestas obras; no entanto, fato indiscutível é que a presença dela é notada nestas composições independentemente deste questionamento.

O número de ouro também é utilizado na concepção de instrumentos musicais por proporcionar uma acústica diferenciada. Os violinos idealizados pelo luthier [10] italiano, Antonio Stradivari (1644-1737), figura 30, utilizavam a seção áurea em suas dimensões. Esses instrumentos são considerados os melhores de todos os tempos dentre sua categoria. Por essa razão, é usado como padrão em virtude de seu formato, som emitido e beleza (SILVA, 2014).

Figura 16 - Violino Stradivari da colecção do Palácio Real de Madrid (1687)
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Estradivário#/media/File:PalacioReal_Stradivarius1.jpg
(acesso em 27/06/2019)

[10] Profissional especializado na construção e reparo de instrumentos de cordadas beliscadas, com caixa de ressonância.

A figura a seguir apresenta medidas do violino relacionadas com a razão áurea.

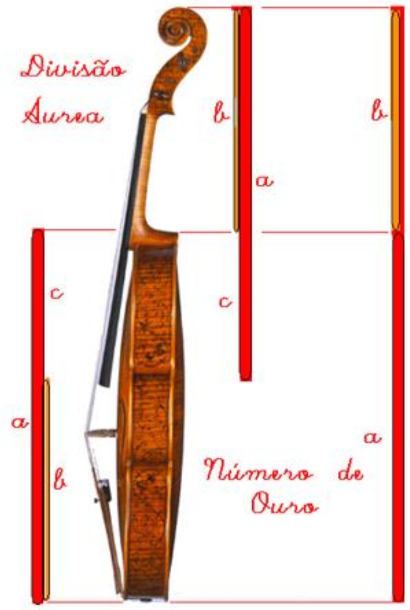

Figura 17 – Segmentos áureos no violino
Fonte: https://musicaeadoracao.com.br/25388/segmento-aureo-aplicado-a-construcao-de-violoncelos-violinos/
(acesso em 27/06/2019)

Além do violino Stradivari, encontramos relações da razão áurea em outros instrumentos musicais como o saxofone e o piano. Jody Espina [11] concebeu um saxofone no qual várias medidas foram relacionadas com o número de ouro, dentre elas a largura das paredes da palheta, a profundidade do furo na frente do bocal, a largura do bico, entre outros. O resultado foi um instrumento com ampliada capacidade de sons harmônicos, favorecendo a projeção do bocal; além disso ocorreu a eliminação de sons estridentes que são característicos de alguns saxofones (SILVA D., 2010).

“Os resultados foram surpreendentes, com os artistas dizendo que é mais brilhante, mais intenso, e mais fácil de tocar do que mesmo as melhores boquilhas que já haviam experimentado antes.” (MEISNER, 2010 apud, SILVA D., 2010, p.19).

Na figura a seguir podemos ver a boquilha de saxofone citada de Jody Espina.

Figura 18 – Boquilha de saxofone de Jody Espina
Fonte: MEISNER, 2010
(acesso em 27/06/2019)

[11] Fundador e presidente da empresa Jody Jazz Saxofone, idealizador das boquilhas de clarinete e saxofone que levam o seu nome.

No piano a razão áurea pode ser notada quando relacionamos suas teclas com a sequência de Fibonacci. Uma oitava do piano é composta de treze teclas, das quais oito são brancas (notas naturais) e cinco pretas (notas alteradas). As cinco teclas pretas formam dois grupos com duas e três teclas, de acordo com a sonoridade dos sons emitidos pelas notas musicais. A figura a seguir apresenta uma visualização destas teclas.

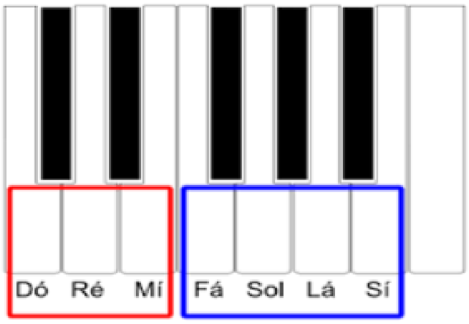

Figura 19 – Teclas de um piano
Fonte: http://canone.com.br/teclado-e-piano/210-como-identificar-as-notas-no-teclado-ou-piano (acesso em 27/06/2019)

A partir das considerações anteriores podemos observar a seguinte sequência: 2 teclas pretas, 3 teclas pretas, 5 teclas brancas (da segunda parte da oitava), 8 teclas brancas (o total de teclas brancas da oitava). Os números 2, 3, 5 e 8 são parte da sequência de Fibonacci, confirmando a relação citada anteriormente. Essa disposição das teclas, de acordo com alguns estudiosos do assunto, explica a sonoridade harmônica e singular do piano, que ocorre através de uma sequência fixa que é medida por vibrações por minuto e por uma amplitude fixa que determinam um tom musical.

8 - A razão áurea na Arquitetura

A arquitetura é uma das áreas na qual questionamentos sobre a presença do número de ouro é bastante discutida. Vários pesquisadores, historiadores e matemáticos debruçaram-se sobre o estudo deste assunto, e ocorrem grandes divergências de opiniões entre eles. Um exemplo disso é o Parthenon (figura 20). (LANDIM,2014)

Figura 20 - Parthenon
Fonte: https://pt.slideshare.net/fragoso7/o-numero-de-ouro
(acesso em 27/062019)

O Parthenon, templo construído durante o governo Péricles e dedicado à deusa grega Atena, foi erguido no topo da acrópole[12] ateniense com participação direta do escultor Fídias. Huntley (1970, apud OLIVEIRA, 2010, p. 29), afirmou que quando o frontão triangular do Parthenon estava intacto (antes de ser atingido por balas de canhão no século XVII) era possível ajustar sua fachada original a um retângulo áureo. Em concordância com Huntley, o matemático Adolf Zeising (1810-1876) em sua obra “A seção Áurea”, de 1884, já fazia esta afirmação, a qual foi replicada em muitos livros referentes a este tema. (LANDIM,2014)

Mas a suspeita da utilização do número de ouro em obras arquitetônicas originou-se bem antes, durante a IV dinastia egípcia por volta do ano 2560 a.C. Neste período teriam sido construídas as pirâmides de Gizé, tumbas destinadas aos faraós Queóps, Quéfren e Miquerinos (figura 21).

[12] local mais alto das antigas cidades gregas, que servia de cidadela e onde eventualmente se erguiam templos e palácios

Figura 21 – Pirâmides de Gizé
Fonte: http://mundodeviagens.com/grande-piramide/
(acesso em 27/02/2019)

A presença do número de ouro nessas pirâmides estaria na razão obtida entre a medida, H, da altura de uma das faces e a metade da medida do lado da base, $\frac{a}{2}$, da pirâmide (figura 22).

Neste contexto, a razão áurea era supostamente:

$$\frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{2H}{a}$$

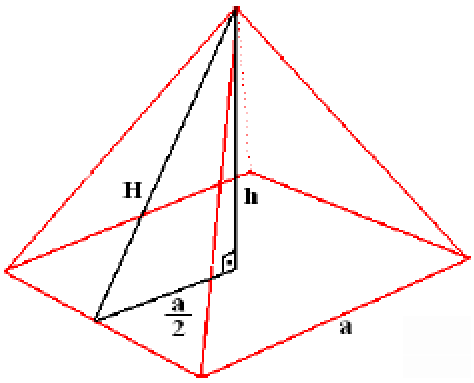

Figura 22 - Pirâmide
Fonte:http://www.ddimmrg.xpg.com.br/o_numero_de_ouro_e_suas_manifestacoes_na_natureza_e_na_arte.pdf
(acesso em 27/06/2019)

Considerando, a medida h da altura da pirâmide (figura 22) e usando o teorema de Pitágoras temos:

$$H^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

O quadro 2, a seguir, mostra as dimensões das pirâmides de Gizé em metros

Quadro 2 – Pirâmides de Gizé

PIRÂMIDE	ALTURA (h)	DIMENSÕES DA BASE (a)
Queóps	146,59	$230{,}33 \times 230{,}33$
Quéfren	143,50	$215{,}20 \times 215{,}20$
Miquerinos	65,00	$102{,}20 \times 104{,}60$

Como a pirâmide de Miquerinos possui base retangular, não é possível fazer essa verificação utilizando a relação obtida anteriormente. Desta forma faremos a verificação com as outras duas.

Na pirâmide de Queóps, a medida H da altura da face é dada por:

$$H^2 = (146{,}59)^2 + \frac{(230{,}33)^2}{4}$$

Ou seja,

$$H = 186{,}417$$

Portanto,

$$\frac{2H}{a} = \frac{372{,}84}{230{,}33} = 1{,}618\ldots$$

Que é aproximadamente, φ.
Para a pirâmide de Quéfren temos:

$$H^2 = (143{,}50)^2 + \frac{(215{,}20)^2}{4}.$$

Isto é,

$$H = 179{,}360$$

Nestas condições,

$$\frac{2H}{a} = \frac{358{,}72}{215{,}20} = 1{,}666\ldots$$

Que não resulta em uma aproximação tão precisa de φ.

Essas verificações comprovam que a razão áurea está presente na pirâmide de Queóps, entretanto este resultado não é o suficiente para se afirmar que os egípcios usaram a divina proporção intencionalmente.

Existem afirmações de que outras obras de grande importância na arquitetura teriam em suas dimensões relação com a razão áurea. Dentre elas poderíamos citar o Taj Mahal, túmulo construído no século XVII a pedido do imperador indiano Shah Jahan e a Catedral de Notre Dame de Chartres, na França, considerada uma das principais igrejas góticas no mundo, e que teve sua planta desenvolvida a partir de um retângulo áureo.

9 - O ensino de proporcionalidade e a razão áurea

Nesta seção, pretendemos expor algumas ideias que mostrem a importância do ensino de proporcionalidade na educação básica. Além disso, será também colocado em pauta a possibilidade de relacionar o ensino deste conteúdo com a razão áurea.

> O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do conhecimento e as situações do cotidiano.(...)O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos. (BRASIL, 1998, p.37)

Baseando-nos nestas afirmações feitas nos Parâmetros Curriculares Nacionais, percebemos a necessidade de adaptar os conteúdos matemáticos à realidade dos alunos. A matemática é considerada por muitos como algo inalcançável. Desta forma, é imprescindível que os professores busquem alternativas para desfazer essa impressão e auxiliar seus alunos a realizarem uma conexão entre a sua visão de mundo e os conteúdos matemáticos estudados.

> É muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência como a matemática, que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas daquela época, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. Poderia ser tratada como um fato histórico. (D'AMBRÓSIO, 2003, apud CANDIDA, 2013, p. 5)

Devido a este contexto é possível notar uma certa desmotivação por parte dos alunos, visto que algumas das vezes esses conceitos se afastam da realidade atual e não apresentam significado real para eles. Relacionar conceitos matemáticos com o cotidiano dos estudantes é uma tarefa que requer certo esforço e empenho na busca por opções que atendam as expectativas de ensino e aprendizagem.

O ensino de proporcionalidade pode propiciar a inserção de estratégias alternativas na aprendizagem de alunos do ensino básico. A proporcionalidade é um tema presente em diversos aspectos do cotidiano dos alunos e transformar o seu ensino em algo que possua significado concreto e perceptível, pode ser uma opção exitosa no que diz respeito ao interesse dos alunos.

Utilizar os conhecimentos sobre a razão áurea pode ser uma boa oportunidade de colocar essa pretensão em prática, ainda que os dados existentes sobre a intencionalidade de seu uso sejam insuficientes em alguns dos casos abordados no desenvolvimento deste trabalho. A presença desta proporção pode ser notada em diversos âmbitos da vida humana e em temas relacionados com os mais diversos ramos do conhecimento, tais como a botânica, a música, as artes plásticas, a biologia e a arquitetura. Desta forma, o ensino de proporcionalidade poderá ser inserido no contexto escolar utilizando-se da interdisciplinaridade, além de propiciar a conexão de assuntos que possam abranger temas relacionados ao interesse dos alunos.

10 - Propostas de ensino

Nesta seção iniciaremos a realização do maior objetivo deste trabalho. Sugerir atividades que utilizem a razão áurea no ensino de proporcionalidade como uma alternativa diferenciada daquelas que são propostas habitualmente nos livros didáticos.

> No entanto, o ensino da proporcionalidade em muitos casos tem se limitado a algumas séries/anos do Ensino Fundamental, ou seja, a sua exploração como um conceito que articula diferentes conteúdos não vem sendo realizada. Isto porque a proporcionalidade é apresentada, a partir de uma mecanização do seu procedimento algorítmico (regra de três), promovendo uma aprendizagem mecânica, sem compreensão do conceito. Corrobora com essa ideia Nunes (2003) ao apontar que, esse conceito bastante simples em sua origem (relação entre duas variáveis) vem sendo trabalhado de forma equivocada, pois, geralmente, não é feita a relação (desde os anos iniciais) com a operação de multiplicação. (NEHRING; SOARES, 2013)

> Críticas (GONÇALVES, 2010; CARRAHER et al., 1986) têm sido feitas com relação ao ensino da proporcionalidade em escolas brasileiras. Uma delas é que, em geral, esse tema só é introduzido no 7o ano do Ensino Fundamental, privilegiando-se a regra de três como meio de resolução de problemas. (SOUZA A.,2018)

O ensino de proporcionalidade, na maioria das vezes, não recebe a devida atenção nos currículos escolares. Isso talvez se deva, em grande parte ao extenso cronograma curricular sugerido para o ensino básico, o que dificulta a possibilidade de realizar um trabalho com opções diversificadas de abordagem no ensino. Apresentar esse conteúdo realizando uma conexão com outras disciplinas pode ser uma alternativa bastante proveitosa e viável, já que desta forma proporciona aos educandos uma possibilidade de perceberem a presença da matemática em âmbitos diversificados.

O desenvolvimento de atividades que buscam a motivação dos alunos em relação ao estudo matemático pode se utilizar de várias ferramentas de ensino, dentre elas, a tecnologia. O *software Geogebra*[10] é uma excelente opção para a realização de atividades práticas de conteúdos relacionados com representação geométrica, pois fornece variadas alternativas de aplicação dos conteúdos matemáticos.

> Num primeiro momento pode-se dizer que a inserção do computador traz uma motivação a mais para o cotidiano escolar, uma vez que ele possui cores, movimentos, imagens etc. [...]. As aulas tem se tornado enfadonhas com o uso intensivo de giz, ou uma outra baseada em discussão de textos, que também podem não motivar (BORBA & PENTEADO 2001, apud SILVA. A, 2014 p.15).

Com o intuito de desenvolver uma proposta que atenda ao maior número possível de estudantes, buscaremos por alternativas que se enquadrem adequadamente na heterogeneidade vigente no universo escolar do país, mas que ao se enquadrarem à realidade escolar, mantenham suas características motivacionais preservadas. A intenção é sugerir atividades que não se restrinjam apenas aos conteúdos matemáticos, mas que estejam relacionadas com outras disciplinas, isso pode permitir um maior interesse dos alunos, visto que ainda que a matemática não seja uma das disciplinas prediletas desse aluno, ele poderá nutrir interesse por conhecimentos diferentes como música, artes, botânica, entre outros.

Na tentativa de aplicar as informações obtidas no desenvolvimento deste trabalho, apresentaremos propostas de intervenções que se utilizem das informações obtidas sobre a presença da razão áurea em variados âmbitos da vida humana, tenham eles sidos usados de maneira proposital ou ao acaso. Com o intuito de aproveitarmos o reconhecimento do número de ouro ao longo dos anos, pretendemos desmistificar a afirmação de que a Matemática é uma ciência desconectada da vida das pessoas, mais ainda, destacar que suas aplicações podem ser diversificadas e atrativas.

Para que as atividades propostas sejam desenvolvidas, os alunos devem ter compreensão sobre razão e proporção, bem como suas propriedades. A intenção das sugestões que serão tratadas em seguida é utilizar o ensino deste conteúdo como uma forma de conexão entre a Matemática e os demais aspectos da vida humana.

10.1 – Proporção áurea nas escalas

Ao aprenderem em Geografia sobre escalas utilizadas na cartografia, os alunos se deparam com a necessidade de reduzir a dimensão real a uma dimensão possível de ser reproduzida em mapas. Para que essa redução seja realizada, fazemos a razão entre as medidas pretendidas pelas medidas reais, obtendo desta forma uma razão que representa proporcionalidade entre a redução e a dimensão real.

Como alternativa de mostrar a importância da proporção em uma escala, podemos sugerir uma atividade em que seja construída a planta baixa de alguma das estruturas da escola, em especial, a da sala de aula da turma. Nessa construção os alunos teriam de fazer uma escala que representasse a redução dessa estrutura. Valendo-se do fato que, na maior parte das vezes, as salas de aula possuem formato retangular, poderíamos propor que os alunos descobrissem se a sala tem em suas dimensões a representação de um retângulo áureo.

É importante, que antes de ser feita essa comparação os alunos tenham recebido informações sobre o que é um segmento áureo, o que é um retângulo áureo e suas propriedades. Feitas estas considerações, apresentaremos um roteiro a ser seguido para a realização desta atividade com os alunos.

[13]O *GeoGebra* é um *software* de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação.

Inicialmente, deverá ser feita uma breve revisão quanto as propriedades relativas a razão e proporção. Em seguida, o professor deverá explicar o que são escalas e qual a sua utilidade. Algumas atividades referentes a este conteúdo, poderão ser aplicadas para uma compreensão mais clara do assunto. Realizada esta etapa, o professor deverá explicar ao grupo de alunos o que é uma planta baixa. O número de aulas para que essas etapas sejam colocadas em prática pode variar muito de acordo com o número de alunos da turma e a forma com a qual os alunos assimilaram a revisão.

O próximo passo para a realização da atividade consiste em pedir que os alunos desenhem a planta baixa de um dos espaços físicos da escola. Para a realização desta atividade, deve-se solicitar aos alunos que obtenham as medidas da estrutura a ser reduzida para a produção da planta baixa, eles devem utilizar uma trena para essa medição. Após desenhar a planta baixa da estrutura escolhida eles deverão verificar a proporcionalidade entre a dimensão real e a escala produzida por eles. O professor poderá aproveitar a oportunidade para realizar perguntas sobre as conclusões que podem ser tiradas a respeito da comparação entre a redução e a dimensão real.

Um outro momento importante da atividade consiste na apresentação do número áureo para a turma. O professor deve falar sobre este número irracional apresentando algumas de suas curiosidades. Além disso, deverá ser mostrado a eles o que é um segmento áureo e um retângulo áureo. Em seguida deverá ser proposto aos alunos que comparem o retângulo obtido na planta baixa com um retângulo áureo.

Feita a comparação, deverá ser proposto aos alunos que construam um retângulo áureo, a fim de exemplificar com maior clareza as suas propriedades. Se possível for, realizar a construção do retângulo áureo com o auxílio do software *Geogebra*, mas para o desenvolvimento dessa atividade com o auxílio computacional, seria recomendável que os alunos tivessem a oportunidade de se familiarizarem previamente com as ferramentas disponíveis no *Geogebra*.

<u>Construção do retângulo áureo utilizando o *Geogebra*</u>:

Para construir o retângulo áureo siga os seguintes passos (LANDIM,2014):

1) Construir um quadrado qualquer, em seguida, nomear seus vértices como $ABCD$, sendo $\overline{AB}$ a medida da base inferior (figura 23).
2) Determine o ponto médio do segmento AB e o nomeie por E.
3) Repita o procedimento no segmento DC e nomeie o ponto médio por F.
4) Ligue o ponto E ao vértice C, determinando o segmento CE.
5) Trace uma circunferência de centro E, com raio $\overline{CE}$.
6) Prolongue o segmento AB até que ele intercepte a circunferência, nomeie este ponto de interseção por G.
7) Trace o segmento GH paralelamente ao segmento BC, de modo que $\overline{BC} = \overline{GH}$ obtendo assim o retângulo $BGHC$.

8) O retângulo construído, $AGHD$, é um retângulo áureo pois $\frac{AG}{GH} \approx \varphi$

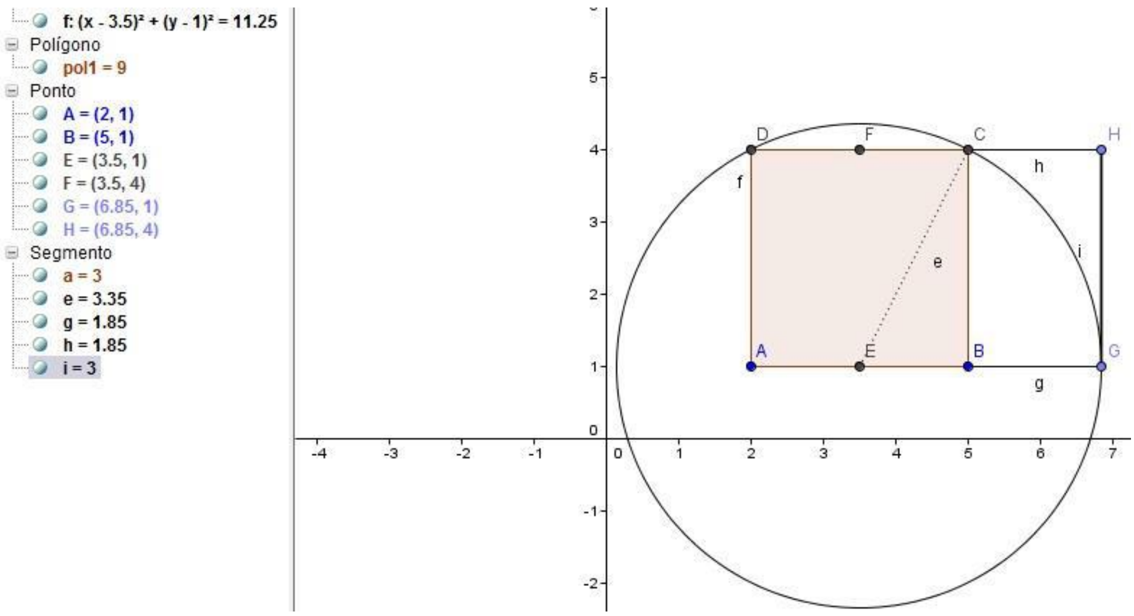

Figura 23 - Retângulo áureo construído no *Geogebra*
Fonte: (LANDIM ,2014 p.63)
(acesso em 01/07/2019)

Findada a construção o professor poderá realizar perguntas e sugerir construções que possibilitem a percepção das propriedades específicas desse retângulo. Para isso, poderá propor que eles construam um novo retângulo áureo a partir do retângulo $BGHC$.

<u>Construção do segmento áureo utilizando régua e compasso</u>

Para construir um segmento áureo siga os seguintes passos (ANASTÁCIO,2015):

1) Trace um quadrado $ACDE$ qualquer (figura 24).
2) Com o uso de um compasso, faça uma abertura maior que a metade do lado AC. Em seguida finque a ponta seca em um desses vértices, e trace um arco. Repita o processo no outro vértice. A interseção dos dois arcos determinará um segmento que passará pelo ponto médio do lado AC, o nomearemos M.
3) Trace uma circunferência com centro M e raio $\overline{MD}$.
4) Prolongue o segmento AC, até que ele intercepte o arco traçado no passo anterior. Chame este ponto de interseção de B.
5) Assim, o ponto C divide o segmento AB em média e extrema razão, ou seja, AB é um segmento áureo.

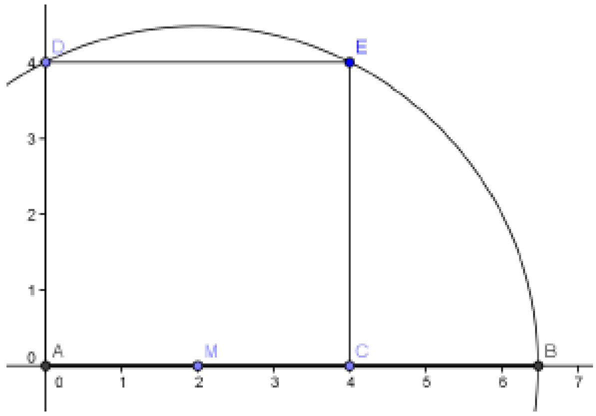

Figura 24 - Segmento áureo AB
Fonte: ANASTÁCIO, L. Razão Áurea: um rico tesouro de surpresas. (acesso em 01/07/2019)

Construção do retângulo áureo utilizando régua e compasso:

Para a construção do retângulo áureo siga os seguintes passos:

1) Construir um quadrado $ABCD$ de lado qualquer (figura 25).
2) Com o uso de um compasso, faça uma abertura maior que a metade do lado AB. Em seguida finque a ponta seca em um dos vértices do quadrado e trace um arco. Repita o processo no outro vértice. A interseção dos dois arcos determinará dois pontos, que ao serem ligados interceptam o lado AB no ponto médio, o qual nomearemos M.
3) Prolongue os lados AB e DC. Faça uma abertura no compasso que tenha como centro o ponto M e raio MC. Em seguida trace um arco de raio MC até o prolongamento do lado AB. Nomeie o ponto de interseção entre o arco e o prolongamento de ponto E.
4) Trace uma perpendicular ao segmento AE passando pelo ponto E. Nomeie a interseção desta perpendicular com o prolongamento do segmento DC por F.
5) O retângulo $AEFD$ (figura 25) é um retângulo áureo.

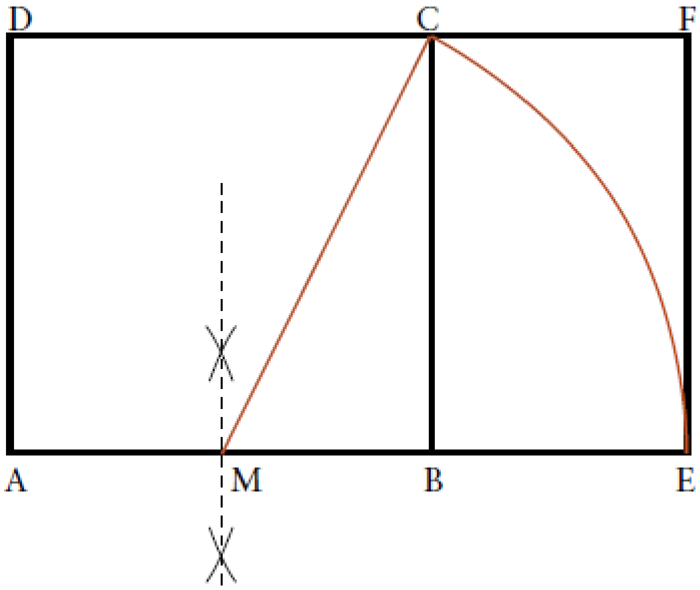

Figura 25 - Retângulo AEFD com auxílio de régua e compasso
Fonte: MENDIAS L., Maira. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. (acesso em 01/07/2019)

Pedir aos alunos que verifiquem se as medidas obtidas no retângulo construído conferem com as propriedades de um retângulo áureo. Para isso, eles devem considerar a seguinte relação:

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} \approx 1{,}618\ldots$$

Em seguida, os estudantes devem realizar a verificação da relação com as medidas obtidas na planta baixa da sala de aula.

10.2 Proporção áurea em outras disciplinas

A Matemática é vista muitas vezes como o “terror” dos alunos:

> A Matemática talvez seja um adas matérias mais “temidas” pelos alunos na escola. Cálculos, números e muito raciocínio fazem da disciplina uma das mais desafiadoras da grade curricular. Como uma bola de neve, o gosto ou o temor pela Matemática aumenta no decorrer das séries da educação básica, o que pode muitas vezes ocasionar a exclusão de muitos alunos.
>
> Inconscientemente, crianças, jovens, e adultos desenvolvem um bloqueio mental com relação a tudo que lhes parece similar com Matemática, e muitas vezes passam a ter um sentimento negativo em relação a essa disciplina, o qual pode apresentar-se sob uma variedade de formas. Alguns sentem apenas aversão à Matemática, enquanto outros tem medo da disciplina. (SILVA, M. V., 2014)

Tendo como intuito desfazer essa impressão negativa e errônea, de que a Matemática é algo incompreensível e que não possui relação real com a vida humana, proporemos atividades que mostrem uma ligação entre a razão áurea e assuntos que não estejam relacionados exclusivamente com conhecimentos matemáticos. Mostrar que existe relação entre Matemática e outras disciplinas, pode se tornar uma alternativa eficiente para despertar o interesse de alunos que não se sintam motivados nas aulas de Matemática. Apresentar atividades que demonstrem a sua aplicabilidade e utilidade em outras áreas possibilitará uma nova visão sobre essa ciência.

> O ensino da Matemática, segundo (Tomaz, 2008) vem ganhando espaço nesse cenário com necessidade de produzir modelos que ajudem a compreender as diversas áreas do conhecimento, tornando-se um grande desafio para o professor nos dias de hoje. É preciso entender que os alunos necessitam de uma explicação mais significativa e atraente, no ensino da Matemática. Para isso, o professor deve ir em busca de novas metodologias de ensino, principalmente fazendo interação com todas as disciplinas. (CANEPPELE; WELTER; GRIEBELER, 2016)

Pretendemos assim instigar a curiosidade sobre a relação existente entre diversificados ramos do conhecimento, além de desmistificar a impressão de que as ciências, a natureza e as atividades humanas não possuem conexão. Tentaremos mostrar aos alunos que naturalmente existem preferências sobre determinados temas, mas esta predileção não torna os demais menos importantes ou desnecessários.

Propomos, desta forma, atividades que mostrem uma conexão entre outras disciplinas e a Matemática com o auxílio da razão áurea. Para tal intento, necessitaremos de uma sala de reprodução de vídeo para que, em seguida, iniciemos a parte prática da atividade. Sugerimos que os alunos assistam aos vídeos “Arte e Matemática – O Número de Ouro” [14] e “Donald no País da Matemágica e o Número de Ouro” [15] .

ATIVIDADE 1 – Verificação de retângulos áureos

Os vídeos citados apresentam curiosidades acerca da proporção áurea e ilustram de maneira lúdica a sua presença em vários aspectos da natureza, arte, arquitetura entre outras áreas de conhecimento. Com a intenção de intensificar a aprendizagem sobre o retângulo áureo, sugerimos que o professor apresente as dimensões reais de algumas obras artísticas, dentre elas algumas exibidas nos vídeos recomendados anteriormente, para que os alunos verifiquem se a razão áurea foi ou não utilizada na concepção delas. As obras escolhidas devem ser retangulares, os alunos deverão verificar se os retângulos são áureos ou não. Para isso utilizarão os conhecimentos obtidos na atividade da seção anterior.

[14] (Disponível no endereço eletrônico: https://www.youtube.com/watch?v=lOCU_n5MFDg, em 12 de janeiro de 2019)
[15] (Disponível no endereço eletrônico: https://www.youtube.com/watch?v=g8oqgrVhA_8, em 12 de janeiro de 2019)

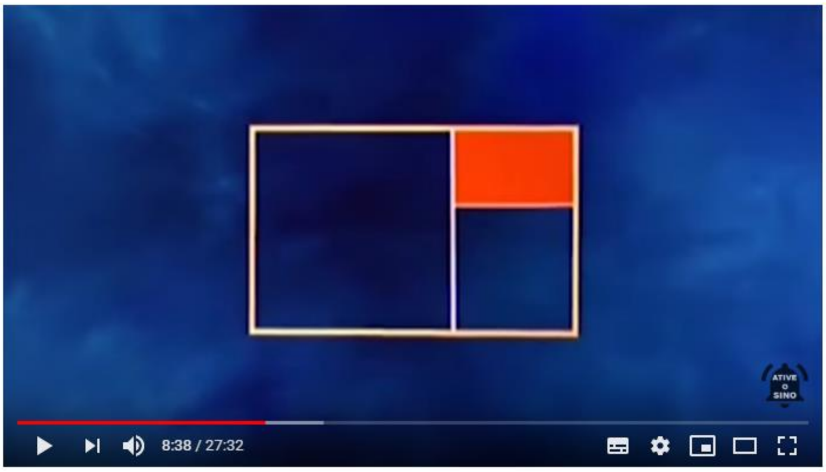

Figura 26 - Retângulo áureo mostrado no vídeo "Donald no país da Matemágica"
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=g8oqgrVhA_8
(acesso em 01/07/2019)

O objetivo é despertar o interesse sobre a proporção presente em obras artísticas, que sejam conhecidas e admiradas por sua beleza e harmonia. Além disso, pretendemos mostrar a relação existente entre a matemática e aspectos diversos da vida humana.

Havendo a possibilidade e disponibilidade, recomendo, que esta atividade seja realizada com a participação de professores de História e Artes, para que desta forma a interdisciplinaridade se torne mais evidente. A colaboração entre os profissionais pode possibilitar uma integração entre as disciplinas e desta forma, poderá despertar o interesse em alunos que se sintam atraídos por História, mas que não se empolguem com estudos matemáticos e vice-versa.

ATIVIDADE 2 – Construção de um pentagrama

Figura 27 - Pentagrama mostrado no vídeo "Donald no país da Matemágica"
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=g8oqgrVhA_8
(acesso em 01/07/2019)

Aproveitando-se das informações obtidas nos vídeos sugeridos, pode se elaborar uma atividade prática em que os alunos construam um pentagrama com o intuito de verificar se há a presença da divina proporção em sua estrutura. Para a realização desta atividade é recomendável que os alunos utilizem pentágonos regulares com diversas medidas de lado, visto que o objetivo principal é mostrar que a razão áurea aparece nestes polígonos, independente, do tamanho que seu lado possui.

Com a finalidade de facilitar o desenvolvimento desta atividade o professor deverá, preferencialmente, levar pentágonos traçados previamente em cartolina ou material similar. É recomendável que os pentágonos tenham lados com medidas extensas o suficiente a fim de permitir a repetição do processo por algumas vezes, além disso deve pedir aos alunos que levem régua e calculadora.

Após distribuir os pentágonos aos alunos, o professor deverá solicitar a eles que verifiquem se a presença da razão áurea pode ser de fato relacionada ao pentagrama. Para que a verificação seja feita, os alunos terão de traçar as diagonais do pentágono, com o auxílio de uma régua obtendo desta forma o pentagrama que dará origem a um novo pentágono, conforme tratamos na seção 2. Em seguida deverão medir a diagonal do pentágono original e calcular a razão entre a medida da diagonal e a medida do lado do pentágono, obtendo assim a razão áurea. O processo deverá se repetir o maior número de vezes possível, para que os alunos percebam que ao fazermos as divisões obteremos o mesmo resultado.

Um dos objetivos desta atividade é instigar a curiosidade sobre a existência do número de ouro em outros polígonos ou objetos do cotidiano, o que poderá levar os alunos a se interessarem por outros temas relacionados a Matemática. Esta atividade também permite a participação do professor de História, pois o pentagrama é um símbolo que possui forte relação com a Grécia Antiga, tema que possui grande importância e abrangência nesta disciplina.

ATIVIDADE 3 – Razão Áurea no corpo humano

A Biologia pode ser utilizada pelo professor de matemática ao tratar o ensino de proporção. Vários temas relacionados a esta ciência possuem ligação com a razão áurea e alguns deles foram vistos ao longo deste trabalho. Ainda tirando proveito das informações contidas nos vídeos, sugerimos uma atividade em que os próprios alunos sejam objeto de verificação da presença ou não da razão áurea.

Figura 28 - Homem Vitruviano mostrado no vídeo “Arte e Matemática - O Número de Ouro”
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=lOCU_n5MFDg
(acesso em 01/07/2019)

Com o auxílio de uma fita métrica, os alunos deverão encontrar sua altura e a altura do umbigo até a planta dos pés, em seguida deverão verificar se a razão entre essas alturas se aproxima ou não do número de ouro. Esta verificação poderá ser estendida para outras partes do corpo como por exemplo a razão entre o comprimento do cotovelo até a ponta dos dedos e do punho até a ponta dos dedos, ou ainda usando as medidas das falanges dos dedos das mãos.

Não há garantia de que estas razões se aproximem do número de ouro, no entanto, podem aguçar a curiosidade dos alunos sobre outros aspectos da natureza que estejam relacionados com a divina proporção, e consequentemente com a Matemática. A concha do náutilus, mostrada no vídeo, pode servir como exemplo, pois permite que os alunos se indaguem sobre a veracidade desta afirmação. Um dos principais intuitos desta prática, consiste em incentivar o pensamento crítico a respeito da precisão das afirmações feitas sobre a presença do número de ouro na natureza, em específico no corpo humano.

10.3 Proporção áurea em obras arquitetônicas

Algumas edificações humanas são consideradas obras de grande notoriedade devido a características específicas como a harmonia e a beleza, podendo despertar admiração e interesse sobre sua concepção em quem as observa. Aproveitando-se deste fato, podemos escolher algumas construções planejadas por arquitetos de renome internacional que possivelmente possuam em suas dimensões a presença da proporção áurea.

Uma boa opção a ser utilizada como exemplo seria o prédio sede da ONU instalado na cidade de Nova York, nos EUA. O arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer (1907-2012), em conjunto com uma equipe de arquitetos, foi um dos responsáveis pelo projeto daquele edifício. Alguns artigos (SILVA, D. N., 2010), (FARIA, 2016) afirmam que os três retângulos presentes em sua fachada principal, são retângulos áureos. O professor dever mostrar fotos do prédio para que os alunos discutam se é possível concordar com afirmação feita e se houver a possibilidade de obter as dimensões do prédio verificar a veracidade da afirmação feita.

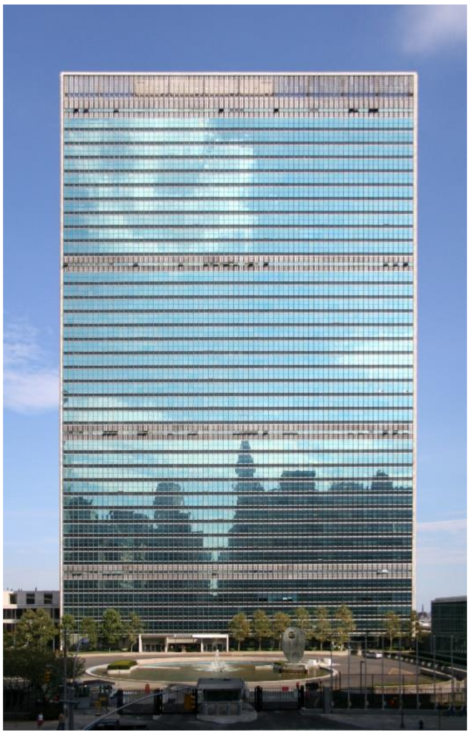

Figura 29 - Sede da ONU, Nova York
Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/14/UNO_New_York.JPG
(acesso em 01/07/2019)

Valendo-se dessa afirmação, o professor poderá indagar a seus alunos se a proporção áurea teria sido utilizada também em obras arquitetônicas da antiguidade.

Em seguida, apresentaria informações sobre as pirâmides egípcias que permitam constatar a sua importância histórica bem como os mistérios envolvidos em sua concepção. Novamente, o auxílio de um professor de História nesta atividade seria proveitoso e eficaz, pois reforçaria a ideia da interdisciplinaridade. Para que este exercício seja desenvolvido é necessário que os alunos possuam noções básicas de geometria e proporcionalidade.

Com o propósito de apresentar um caráter inovador e que seja atrativo aos olhos dos estudantes, seria recomendável a apresentação de imagens que demonstrem a grandiosidade dessas construções. Para isso sugerimos dois vídeos que falam sobre as pirâmides egípcias: "Pirâmides do Egito – Como elas foram construídas?"[16] e "5 Fatos

Incríveis (que você não sabia) sobre as Pirâmides Egípcias”[17]. Neles são exibidas informações que tendem a despertar interesse e curiosidade sobre este assunto.

Figura 30- Imagem do vídeo “5 Fatos Incríveis (que você não sabia) sobre as Pirâmides Egípcias”
Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=4oDAc0nubAQ
(acesso em 01/07/2019)

Após a discussão com os discentes sobre as informações dos vídeos, será proposta a verificação da presença ou não da proporção áurea nas dimensões das pirâmides de Gizé. Serão fornecidas aos alunos as dimensões das pirâmides (que estão dispostas na tabela 2, da seção 8 deste trabalho). Em seguida será pedido a eles que verifiquem a autenticidade da seguinte afirmação: “a razão obtida entre a altura de uma das faces e a metade do lado da base da pirâmide é o número de ouro”. Após a realização dessa etapa, propõe-se que sejam colocados em discussão os resultados obtidos.

[16](Disponível no endereço eletrônico: https://www.youtube.com/watch?v=4oDAc0nubAQ, em 12 de janeiro de 2019)
[17](Disponível no endereço eletrônico: https://www.youtube.com/watch?v=q0BxKF2RGzI, em 12 de janeiro de 2019)

11 - Considerações finais

Durante o desenvolvimento deste trabalho, foi possível descobrir diversas nuances da aplicação ou presença da razão áurea. Seja esta presença em aspectos da natureza ou construções e realizações humanas. Trabalhar a proporcionalidade relacionando a com a razão áurea foi uma alternativa de expandir as aplicações desse conceito, tornando seu ensino dinâmico e menos mecanizado.

Na elaboração deste trabalho foi possível perceber que existe muito o que se estudar e descobrir a respeito da razão áurea. Não é possível explicitar se todas as aplicações do número de ouro foram de fato propositais ou não, ainda que ela seja notada na natureza. Entretanto uma convicção foi obtida neste trabalho, a de que existe muito o que se estudar e descobrir sobre esse número. Ancorada, nesta afirmação, busquei inspiração para desenvolver atividades que gerassem uma nova visão dos alunos com respeito a presença da Matemática em âmbitos diversificados.

A sociedade em que vivemos, tornou-se incondicionalmente dependente das inovações tecnológicas, fato que obriga o professor a se adaptar a esta realidade. Não é possível acreditar que os jovens de hoje contentem se com os mesmos métodos de ensino utilizados no passado. A sistemática aula, exibida em um cenário de lousa e giz precisa ser renovada. O desafio não é simples, sabemos disso, pois vivemos em um país de dimensões continentais onde predominam a diversidade e também a desigualdade de recursos.

No entanto, estas características não devem ser fator determinante na tarefa árdua de incentivar o aprendizado, tampouco servir de empecilho para a busca de alternativas que atendam as demandas da profissão. Crendo nesta afirmação, sugerimos neste trabalho algumas atividades que podem alcançar o intento de apresentarem caráter inovador e, ao mesmo tempo, incentivarem o surgimento de outras atividades que despertem as expectativas dos alunos, sem deixar de atender as necessidades de cumprimento dos currículos escolares.

Outro aspecto considerado alvo de destaque é a interdisciplinaridade. A cooperação de outros professores no desenvolvimento das atividades serve de estímulo aos alunos para que compreendam a necessidade de trabalharem em conjunto e também a obrigatoriedade de se dedicarem ao estudo de temas diversificados. Muitos educadores, (CANEPPELE; WELTER; GRIEBELER, 2016), recomendam a interdisciplinaridade como ferramenta de ensino por considerá-la uma forma de permitir uma integração de conhecimentos diversificados e que resultam em efeitos benéficos e úteis ao processo de ensino.

> A busca do conhecimento por meio da interdisciplinaridade leva a crer que não existe a intenção de negar o conhecimento fracionado, mas, sim, partir, desse saber acumulativo como base, para o entrelaçamento entre as ciências. Seria buscar na reciprocidade entre os diferentes saberes, nas entrelinhas, a construção de um conhecimento mais global, e ao mesmo tempo, abrangente de um fenômeno, sem excluir as especialidades. (PAGLIARINI, E. C. M., 2004)

Desta forma, creio que o presente trabalho apresenta uma alternativa viável sobre o estudo da razão áurea, visto que este tema não é explorado em todo seu potencial no ensino básico, apesar de ser alvo de interesse por parte de estudiosos de diferentes áreas de conhecimento.

Vale ainda, ressaltar que o assunto não se esgota ao término deste trabalho, pois existem muitas indagações a serem feitas a respeito da proporção divina. O número de ouro continua produzindo questionamentos que podem levar pesquisadores a novas descobertas e conclusões, pois se trata de um tesouro da matemática.

Segundo Kepler (1571-1630), “A geometria possui dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de uma linha em extrema e média razão. O primeiro, podemos comparar a uma medida do áureo; o segundo podemos chamar joia preciosa.” (apud HUNTLEY, 1985 p.35)

11 - Referências e Bibliografias consultadas:

[1] ANASTÁCIO, L. Razão Áurea: um rico tesouro de surpresas. 14p. Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática – Profmat – Universidade Federal de São João Del Rei, São João del - Rei, 2015.

[2] BELUSSI, G. M. et al. Número de Ouro. Disponível em: http://www.uel.br/cce/mat/geometrica/artigos/ST-15-TC.pdf. Acesso em: 19 ago. 2018.

[3] BEZ, E. T. Relacionando padrões entre sequência de Fibonacci secção áurea e ternos pitagóricos. 80p. Trabalho de conclusão de curso de graduação (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997.

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

[5] BRENNER, Daniela. Razão Áurea: conexões com a natureza, o corpo humano, a pintura e a arquitetura. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_unioeste_danielabierhalsbrenner.pdf. Acesso em: 03 out. 2018.

[6] CÂMARA, M. A.; RODRIGUES, M. S. O número Φ. Disponível em: http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_revista_11_artigo_05.pdf. Acesso em: 12 set. 2018.

[7] CAMARGO, N. M. A utilização da Razão Áurea no design de websites. Disponível em: http://www.espweb.uem.br/site/files/tcc/2008/Nelio%20Mayer%20Camargo%20-%20A%20utilizacao%20da%20Razao%20Aurea%20no%20design%20de%20websites.pdf. Acesso em: 19 ago. 2018.

[8] CANDIDA, S. A. O ensino dos números inteiros por meio da História da Matemática. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2013/2013_uenp_mat_artigo_silvia_aparecida_candida.pdf. Acesso em 06 de out. 2018.

[9] CANEPPELER; WELTER; GRIEBELER. Interdisciplinaridade: Ligando a Matemática a outras disciplinas. Revista Saberes e Sabores Educacionais, SC, n.3, p.118-128. 2016. Disponível em: file:///C:/Users/Grayce/Downloads/233-875-1-PB.pdf. Acesso em: 01 jul. 2019.

[10] COSTA, C. B. Avaliação da Proporção Áurea em radiografias cefalométricas laterais de indivíduos edêntulos antes e depois do tratamento por próteses totais. 75p. Dissertação (Mestrado em Biopatologia Bucal, Área de Radiologia Odontológica) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José dos Campos, 2009.

[11] FARIA, L. L. Razão Áurea: Matemática e Arte, a verdadeira harmonia! 50p. Trabalho de conclusão de curso de graduação (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São João del Rei, São João del Rei, 2016.

[12] FERRER, J. F. O Número de Ouro na Arte, Arquitetura e Natureza: Beleza e harmonia. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II/modulo_IV/numero_de_ouro.pdf. Acesso em: 22 ago. 2018.

[13] FRANCISCO, S. V. L. Entre o fascínio e a realidade da Razão Áurea. 121p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2017.

[14] FREITAS, E. F. M. Proporção Áurea e curiosidade históricas ligadas ao desenvolvimento da ciência. Disponível em: http://www.africamae.com.br/wp-content/pdf/aurea.pdf. Acesso em: 23 ago. 2018.

[15] HEFEZ, A. FERNANDEZ, C.S. Introdução à Álgebra Linear: Coleção PROFMAT. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[16] HENSCHEL, C. J.; BAIER, T. Razão Áurea da Antiguidade Grega até o século XX: na música, no design e na arquitetura. Disponível em: https://www.15snhct.sbhc.org.br/resources/anais/12/1473882675_ARQUIVO_RAZAOAUREADAANTIGUIDADEGREGAAOSECULOXX.pdf. Acesso em: 30 ago. 2018.

[17] HUNTLEY, H.E. A Divina Proporção: Um ensaio sobre a beleza na Matemática. Trad. Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Editora Universidade de Brasília,1985. 178p.

[18] JUNIOR, J. M. C. A Matemática por trás de um Número: Razão Áurea. 50p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014.

[19] LANDIM, N. P. Razão Áurea: expressando a beleza desse número para o ensino médio. 71p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Mossoró, 2014.

[20] LEOPOLDINO, K. S. M. Sequências de Fibonacci e a Razão Áurea. Aplicações no Ensino Básico. 117p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

[21] LINCK, L. A. A História da Matemática no Ensino da Geometria: Uma contextualização pela Razão Áurea. 83p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017.

[22] MELO, M. I. A. Razão Áurea e Números de Fibonacci: da teoria à prática através da fotografia. 80p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de janeiro, 2017.

[23] MENDIAS, M. A razão áurea e os padrões harmônicos na natureza, artes e arquitetura. Exacta, Universidade Nove de Julho, São Paulo, SP, núm. 3, p. 35-48. Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=81000304. Acesso em: 19 ago. 2018.

[24] MENEGAT, M. Uma nova forma de ensinar razão e proporcionalidade. 54p. Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática – Departamento de Matemática Pura e Aplicada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

[25] NEHRING C. M; SOARES M. A. S. Proporcionalidade: Uma análise de livros didáticos do ensino fundamental. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática, ULBRA, Canoas, RS ,2013. Disponível em: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1336/146. Acesso em 01jul. 2019

[26] OLIVEIRA, C.B. Razão Áurea: Suas aplicações e importância no Ensino de Matemática. 49p. Trabalho de conclusão de curso de graduação em Matemática - Faculdade Alfredo Nasser Instituto Superior de Educação, Aparecida de Goiânia, 2010.

[27] OLIVEIRA, E.; FERREIRA, T. E. O número de ouro e suas manifestações na natureza e na arte. Complexus – Engenharia, Arquitetura e design. Salto, SP, ano 1, n.02, p. 64-81, set. 2010.

[28] PAGLIARINI, E. C. M., A formação docente para o trabalho no ensino superior. 100p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica, Campinas, 2004.

[29] QUEIROZ, R. M. Razão Áurea: A beleza de uma razão surpreendente. 39p. Trabalho de conclusão de curso de especialização – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

[30] SANTOS, E.; CARDOSO, L.; SILVA, J. Buriti: relação entre a sequência de Fibonacci, razão áurea e espiral logarítmica. Disponível em: http://proativa.virtual.ufc.br/sipemat2012/papers/200/submission/director/200.pdf. Acesso em: 19 ago. 2018.

[31] SILVA, A. O uso dos laboratórios de informática nas escolas públicas de Campina Grande: Que realidade é essa? 33p. Monografia (Curso de Especialização) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

[32] SILVA, D. N. Som da Ciência: O número de ouro como tema transdisciplinar em Artes, Matemática, História e Biologia. 52p. Trabalho de conclusão de curso de graduação (Licenciatura em Música) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

[33] SILVA, R. R. Razão Áurea como motivação ao estudo de conteúdos matemáticos. 115p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade federal de Goiás, Catalão, 2014.

[34] SILVA, V. M. As dificuldades de aprendizagem da Matemática e sua relação com a Matofobia. 59p. Monografia (Curso de especialização) – Universidade Estadual da Paraíba, Princesa Isabel, 2014.

[35] SOUZA, A.; VILA, M. Razão Áurea e Aplicações: contribuições para a aprendizagem de proporcionalidade de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Disponível em: http://www.eventos.ulbra.br/index.php/ebrapem2012/xviebrapem/paper/viewFile/605/231. Acesso em: 22 out. 2018.

[36] SOUZA, L.G.S.; ABDOUNUR, O.J. A Razão Áurea x Mozart, Villa Lobos e Bartók. Disponível em: http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Souza_L_G_S_Raz%C3%A3o_%C3%81urea_x_Mozart_Villa_Lobos_e_Bart%C3%B3k.pdf. Acesso em: 30 ago. 2018.

[37] TAKESHITA, W. M. et al. Verificação da proporção áurea em radiografias cefalométricas laterais, de pacientes portadores de Classe II de Angle, antes e depois do tratamento ortodôntico. Revista Odonto, São Bernardo do Campo, SP, ano 15 n.29, p. 16 – 24, jan. jun. 2007.